

Ю.Л. САРКИСЯН, К.Г. СТЕПАНЯН, Г.А. ГЕВОРКЯН

**ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УПРУГИХ ДРЕВОВИДНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ БЕЗ ВНЕШНИХ СВЯЗЕЙ**

Предлагается распространение составленного на основе обобщенного метода Ньютона-Эйлера алгоритма динамического анализа упругих манипуляторов на случай упругих древовидных механических систем, свободных от внешних ограничений. Оснащенная расчетная схема численного решения смешанной задачи динамики сохраняет в итоге все преимущества, достигнутые ранее при построении отработанного алгоритма.

**Ключевые слова:** упругие древовидные системы, дифференциальные уравнения движения, алгоритм динамического анализа.

1. **Введение.** Предлагаемая статья является продолжением [1]. Здесь представлены результаты теоретических исследований в области оптимизации динамического анализа линейных внешних связей сложных многосвязных систем с упругими звеньями. Постановка смешанной задачи динамики и ее решение обобщенным методом Ньютона-Эйлера, сформулированные ранее в [1] для упругих манипуляторов, подлежат обобщению на упругие древовидные динамические системы без внешних связей с построением расчетного алгоритма степени сложности, пропорционального размерности рассматриваемых систем, т.е.  $O(n)$ .

2. **Уравнения динамического равновесия упругого «узлового» звена.** Рассмотрим сложную динамическую систему, состоящую из  $n$  линейно-деформируемых звеньев, кинематические цепи которой образуют древовидную структуру, изображенную на рис. 1. Предполагается далее, что древовидная система (рис. 1) состоит из упругих звеньев  $C_j \in \{M\}$ ,  $j=1, \dots, n$ , которые соединены между собой поступательными или вращательными кинематическими парами в точках  $A_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , определяемыми логической переменной  $\sigma_j$ ,  $j=1, \dots, n$  [1], а смешанная задача динамики формулируется для данного класса систем аналогично постановке смешанной задачи динамики упругих манипуляторов с использованием идентификатора  $\chi_j$ ,  $j=1, \dots, n$  [1]. Однако при динамическом анализе систем сложной структурной иерархии на основе метода Ньютона-Эйлера, в отличие от систем простой кинематической цепи, состоящих из так называемых «простых» звеньев, возникает необходимость особого описания уравнений движения так называемых «узловых» звеньев системы, коими на примере системы, изображенной на рис. 1, являются структурные элементы  $C_2, C_4$  и  $C_6$ .

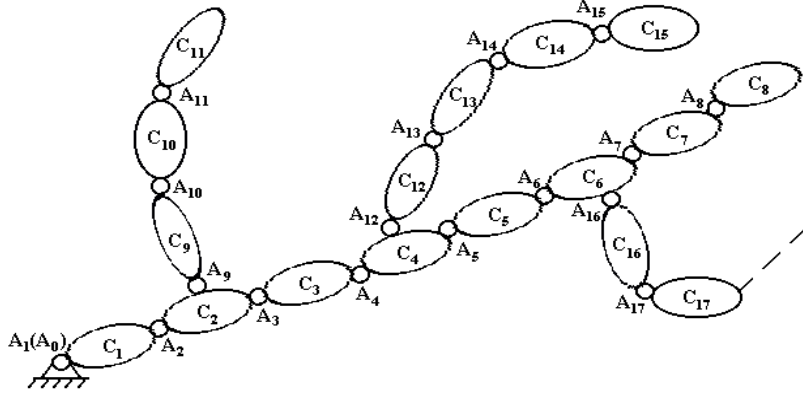


Рис. 1

Пусть имеются два подмножества  $\{\bar{M}\} = \{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_\varphi\}$  и  $\{\tilde{M}\} = \{\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \dots, \tilde{C}_\psi\}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  – натуральные числа, представляющие собой соответственно количества «простых» и «узловых» звеньев некоторой древовидной динамической системы при отсутствии внешних связей, которые удовлетворяют условиям  $\{\bar{M}\} \cup \{\tilde{M}\} = \{M\}$  и  $\varphi + \psi = n$ .

Рассмотрим подмножество  $\{\tilde{M}\}$  упругих «узловых» звеньев системы  $\tilde{C}_l, l \in \{1, \dots, \psi\}$ , имеющих одну входящую подвижную систему отсчета  $Q_j$ , начало которой жестко связано с точкой  $A_j, j \in \{1, \dots, n\}$ , и  $\eta_l$  выходящих подвижных систем координат  $Q_{a_k}$ , начала которых зафиксированы в точках  $A_{a_k}$ , где  $a_k > j, k = 1, \dots, \eta_l, l \in \{1, \dots, \psi\}$  (рис. 2). Ввиду необходимости учета разнородных условий задачи динамики в парах  $a_k, k = 1, \dots, \eta_l, l \in \{1, \dots, \psi\}$  разлагаем множество  $\{A_l\} = \{a_1, a_2, \dots, a_{\eta_l}\}$  на подмножества  $\{B_l\} = \{b_1, b_2, \dots, b_{\xi_l}\}$  и  $\{C_l\} = \{c_1, c_2, \dots, c_{\zeta_l}\}$  для  $l \in \{1, \dots, \psi\}$ , причём  $\{A_l\} = \{B_l\} \cup \{C_l\}, l \in \{1, \dots, \psi\}$ , где  $\xi_l$  и  $\zeta_l$  – натуральные числа, характеризующие соответственно количества пар  $b_i, i = 1, \dots, \xi_l$  и  $c_k, k = 1, \dots, \zeta_l$  при  $l \in \{1, \dots, \psi\}$ , для которых выполняются следующие условия логической переменной  $\chi$ :  $\chi_{b_i} = 0, \forall b_i \in \{B_l\}, i = 1, \dots, \xi_l$  и  $\chi_{c_k} = 1, \forall c_k \in \{C_l\}, k = 1, \dots, \zeta_l$  при  $l \in \{1, \dots, \psi\}$ . Эти натуральные числа связаны между собой очевидным равенством  $\xi_l + \zeta_l = \eta_l, l \in \{1, \dots, \psi\}$ . На основании вышеизложенного нелинейные дифференциальные уравнения движения упругого «узлового» звена  $C_j \in \{M\}$  можно представить в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} {}^j \mathbf{J}_{\pi j}^* & {}^j \mathbf{J}_{\pi e j}^* \\ {}^j \mathbf{J}_{e \pi j}^* & {}^j \mathbf{J}_{e e j}^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^j \tilde{\mathbf{V}}_j \\ {}^j \tilde{\mathbf{q}}_j^e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^j \tilde{\mathbf{C}}_j^{r*} \\ {}^j \tilde{\mathbf{C}}_j^{e*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^j \tilde{\mathbf{F}}_j \\ \mathbf{0}_{N_j} \end{bmatrix}, \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^j \mathbf{J}_{rj}^* = {}^j \mathbf{J}_{rj} + \sum_{i=1}^{\xi_j} {}^{b_i} \mathbf{T}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{b_i} + \sum_{k=1}^{\zeta_j} {}^{c_k} \mathbf{T}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{c_k}, \\ {}^j \mathbf{J}_{rej}^* = {}^j \mathbf{J}_{rej} + \sum_{i=1}^{\xi_j} {}^{b_i} \mathbf{T}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{b_i} + \sum_{k=1}^{\zeta_j} {}^{c_k} \mathbf{T}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{c_k}, \\ {}^j \mathbf{J}_{ej}^* = {}^j \mathbf{J}_{ej} + \sum_{i=1}^{\xi_j} {}^j \Phi_j^T(A_{b_i}) \cdot {}^{b_i} \mathbf{R}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{b_i} + \sum_{k=1}^{\zeta_j} {}^j \Phi_j^T(A_{c_k}) \cdot {}^{c_k} \mathbf{R}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{G}}_{c_k}, \\ {}^j \mathbf{J}_{eej}^* = {}^j \mathbf{J}_{eej} + \sum_{i=1}^{\xi_j} {}^j \Phi_j^T(A_{b_i}) \cdot {}^{b_i} \mathbf{R}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{b_i} + \sum_{k=1}^{\zeta_j} {}^j \Phi_j^T(A_{c_k}) \cdot {}^{c_k} \mathbf{R}_j^T \cdot \tilde{\mathbf{H}}_{c_k}; \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^j \bar{\mathbf{C}}_j^{r*} = {}^j \bar{\mathbf{C}}_j^r + \sum_{i=1}^{\xi_j} {}^{b_i} \mathbf{T}_j^T \cdot {}^{b_i} \tilde{\bar{\mathbf{p}}}_{b_i} + \sum_{k=1}^{\zeta_j} {}^{c_k} \mathbf{T}_j^T \cdot {}^{c_k} \tilde{\bar{\mathbf{p}}}_{c_k}, \\ {}^j \bar{\mathbf{C}}_j^{e*} = {}^j \bar{\mathbf{C}}_j^e + \sum_{i=1}^{\xi_j} {}^j \Phi_j^T(A_{b_i}) \cdot {}^{b_i} \mathbf{R}_j^T \cdot {}^{b_i} \tilde{\bar{\mathbf{p}}}_{b_i} + \sum_{k=1}^{\zeta_j} {}^j \Phi_j^T(A_{c_k}) \cdot {}^{c_k} \mathbf{R}_j^T \cdot {}^{c_k} \tilde{\bar{\mathbf{p}}}_{c_k}. \end{array} \right. \quad (3)$$

В выражениях (2) - (3) принимаем во внимание обозначения

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{G}}_{b_i} = \mathbf{G}_{b_i} - \mathbf{U}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \mathbf{T}_j, \text{ где } \mathbf{G}_{b_i} = \mathbf{K}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \mathbf{T}_j, \\ \tilde{\mathbf{H}}_{b_i} = \mathbf{H}_{b_i} - \mathbf{U}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \mathbf{R}_j \cdot {}^j \Phi_j(A_{b_i}), \text{ где } \mathbf{H}_{b_i} = \mathbf{K}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \mathbf{R}_j \cdot {}^j \Phi_j(A_{b_i}), \\ {}^{b_i} \tilde{\bar{\mathbf{p}}}_{b_i} = {}^{b_i} \bar{\mathbf{p}}_{b_i} + \mathbf{K}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \bar{\mathbf{a}}_{b_i} \cdot (\tau_{b_i} - {}^{b_i} \bar{\mathbf{a}}_{b_i}^T \cdot {}^{b_i} \bar{\mathbf{p}}_{b_i}) \cdot Z_{b_i}, \text{ где} \\ {}^{b_i} \bar{\mathbf{p}}_{b_i} = \mathbf{K}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \bar{\mathbf{h}}_{b_i}(A_{b_i}) + {}^{b_i} \bar{\mathbf{m}}_{b_i}, \end{array} \right. \quad (4)$$

прич, м

$$\mathbf{U}_{b_i} = Z_{b_i} \cdot \mathbf{K}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \bar{\mathbf{a}}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \bar{\mathbf{a}}_{b_i}^T \cdot \mathbf{K}_{b_i} \quad \text{и} \quad Z_{b_i} = 1 / ({}^{b_i} \bar{\mathbf{a}}_{b_i}^T \cdot \mathbf{K}_{b_i} \cdot {}^{b_i} \bar{\mathbf{a}}_{b_i}),$$

а также учитываем сокращения

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{G}}_{c_k} = \mathbf{G}_{c_k}, \text{ где } \mathbf{G}_{c_k} = \mathbf{K}_{c_k} \cdot {}^{c_k} \mathbf{T}_j; \\ \tilde{\mathbf{H}}_{c_k} = \mathbf{H}_{c_k}, \text{ где } \mathbf{H}_{c_k} = \mathbf{K}_{c_k} \cdot {}^{c_k} \mathbf{R}_j \cdot {}^j \Phi_j(A_{c_k}); \\ {}^{c_k} \tilde{\bar{\mathbf{p}}}_{c_k} = {}^{c_k} \bar{\mathbf{p}}_{c_k} + \mathbf{K}_{c_k} \cdot {}^{c_k} \bar{\mathbf{a}}_{c_k} \cdot \ddot{d}_{c_k}^r, \text{ где } {}^{c_k} \bar{\mathbf{p}}_{c_k} = \mathbf{K}_{c_k} \cdot {}^{c_k} \bar{\mathbf{h}}_{c_k}(A_{c_k}) + {}^{c_k} \bar{\mathbf{m}}_{c_k}. \end{array} \right. \quad (5)$$

Пояснения всех остальных неопределенных символов, фигурирующих в выражениях (1) - (5), приводятся в публикациях [1,2].

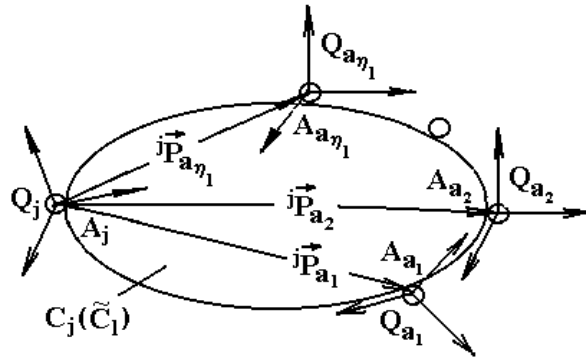


Рис. 2

3. **Схема алгоритма динамического анализа.** Построение алгоритма решения смешанной задачи динамики древовидных систем с упругими звеньями при отсутствии внешних связей производится на основе обобщенного метода Ньютона-Эйлера в три расчетно-символических цикла, аналогично решению одноименной задачи упругих манипуляторов [1]. Для этого требуется лишь включение в вычислительную схему опорного алгоритма расчетного модуля «узлового» звена, динамическая модель которого описывается выражениями (1) - (5).

В итоге схема расчетного алгоритма степени сложности  $O(n)$  упругих древовидных систем без внешних связей предусматривает для каждого момента  $t \in [0, T]$ , где  $T$  - конечное время функционирования системы, следующую последовательность вычислительных процедур :

1 - рекурсивная процедура, включающая для  $j=1, \dots, n$ :

- расчет необходимых матриц, векторов и постоянной [2]:  ${}^jR_{j-1}, {}^jT_{j-1}, {}^jJ_{\pi j}, {}^jJ_{геj}, {}^jJ_{cej}, {}^j\bar{C}_j^r, {}^j\bar{C}_j^e, {}^j\bar{h}_j, {}^j\bar{a}_j$  и  $\tau_j = \tau_j(\Gamma_j)$ , если  $\chi_j = 0$ ;
- кинематический расчет главной цепи ( $C_1 - C_8$ );
- кинематический расчет производных цепей ( $C_9 - C_{11}$ ), ( $C_{12} - C_{15}$ ), ( $C_{16} - C_{17}$ ) и т.д. в указанной последовательности;

2 - рекурсивная процедура, предполагающая для  $j=n, \dots, 1$ :

- символический расчет производных цепей  $\dots, (C_{17} - C_{16}), (C_{15} - C_{12})$  и  $(C_{11} - C_9)$  в означенной последовательности с использованием алгоритмического модуля для «простого» звена;
- символический расчет главной цепи ( $C_1 - C_8$ ) с совместным использованием модулей для «простого» и «узлового» звеньев;

3-я рекурсивная процедура, требующая для  $j=1, \dots, p$ :

- динамический расч, т главной цепи ( $C_1 - C_8$ );
- динамический расч, т производных цепей ( $C_9 - C_{11}$ ), ( $C_{12} - C_{15}$ ), ( $C_{16} - C_{17}$ ) и т.д. в отмеченной последовательности.

Теоретическое обоснование эффективности представленного расч, тного алгоритма динамического анализа упругих древовидных систем без внешних связей вытекает из сопоставления зависимостей числа расч, тных операций от размерности исследуемых систем, т.е.  $O(n)$  и  $O(n^3)$ . Очевидно, что, начиная с некоторого значения  $n$ , характеристика  $O(n^3)$ , свойственная формализму Лагранжа, резко отдалается от характеристики  $O(n)$ , присущей формализму Ньютона-Эйлера. Отсюда следует особая целесообразность использования предложенного алгоритма для анализа сложных упругих систем большой размерности [3].

4. **Численная реализация предложенного алгоритма динамического расч, та.** В качестве примера упругой древовидной динамической системы без внешних связей рассмотрим плоский комбинированный манипулятор, представленный на рис. 3. «Узловое» звено системы ( $A_2A_3$ ) предполагаем линейно-упругим, а остальные звенья – абсолютно жесткими.

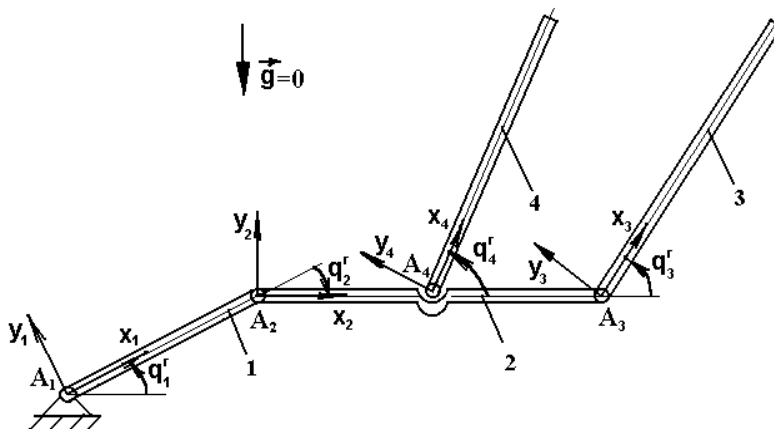
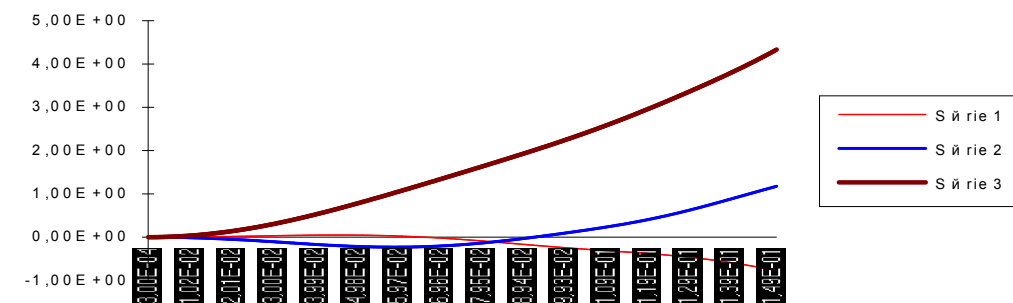


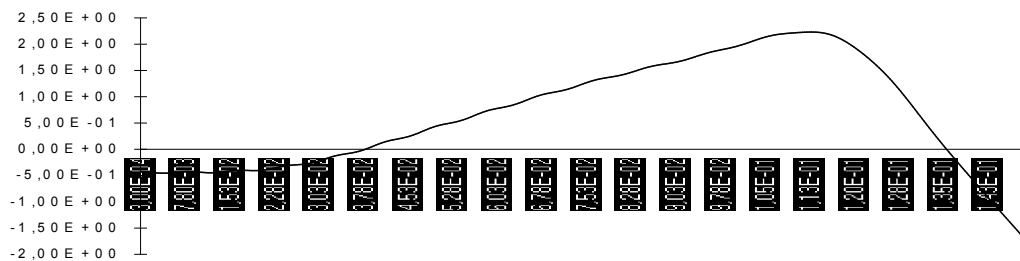
Рис. 3

Физико-механические характеристики звеньев круглого поперечного сечения радиуса  $r = 3,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ :  $\rho_i = 7800 \text{ кг/м}^3$ ,  $i=1, \dots, 4$ ;  $l_1 = 0,1 \text{ м}$ ,  $l_i = 0,35 \text{ м}$ ,  $i=2, \dots, 4$ ;  $A_2A_4 = l_2 / 2$ ;  $E_2 = 200 \text{ ГПа}$ . Далее, указав начальные условия движения системы для обобщ, нных координат  $q_i^r(0) = \dot{q}_i^r(0) = 0$ ,  $i=1, \dots, 4$  и для

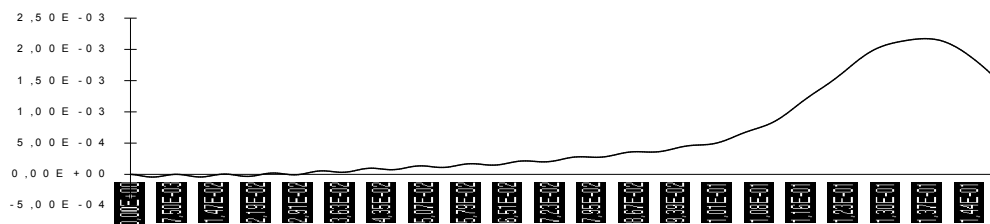
упругой переменной  $\bar{q}_2^c(0) = \dot{\bar{q}}_2^c(0) = 0$ , где  $N_2 = 1$ , решаем смешанную задачу динамики с заданными функциями приводных моментов  $C_i(t) = 1H \cdot M$ ,  $i = 1, \dots, 3$  и обобщенного ускорения  $\ddot{q}_4^r(t) = 100 M/c^2$  в интервале интегрирования  $t \in [0; 0,15c]$ . Графики зависимостей обобщенных координат  $q_i^r$ ,  $i = 1, \dots, 3$  и приводного момента  $C_4$  от времени  $t$  изображены на рис. 4 а, б, а изменение линейной деформации  ${}^2\ddot{u}_2(A_3)$  во времени – на рис. 4 в. Программное обеспечение расчетного алгоритма реализовано на языке Turbo Pascal, а контрольный тест произведен на PC PENTIUM 100 с использованием переменных расширенного типа точности Extended, продуцируя машинное время численного решения задачи ТЕР = 6 с.



а)



б)



в)

Рис. 4

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Саркисян Ю.Л., Степанян К.Г., Азюз Н., Геворкян Г.А. Динамический анализ упругих манипуляторов обобщенным методом Ньютона-Эйлера // Известия НАН РА и ГИУА. Сер.ТН. - 2004. - Т. 57, N1. - С. 3 - 10.
2. Boyer F. and Khalil W. An efficient calculation of flexible manipulator inverse dynamics // Int. J. Robotics Research. - 1998. - V. 17, N3. - P. 282 - 293.
3. Verlinden O. Simulation du comportement dynamique de systemes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe: These de Doctorat de la Faculté Polytechnique de Mons (Belgique). - 1994. - 222 p.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 10.10.2005.

**Յու.Լ. ՄԱՐԳՍՅԱՆ, Կ.Գ. ՍՏԵՓԱՆՅԱՆ, Հ.Ա. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ**

### **ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ՃՅՈՒՂԱՎՈՐՎԱԾ ՄԵԽԱՆԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՎԵՐ- ԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՏԱՔԻՆ ԿԱՊԵՐԻ ԲԱՑԱԿԱՑՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ**

Առաջարկվում է Նյուտոն-Էյլերի ընդհանրացված մեթոդի հիման վրա կազմված առաձգական մանիպուլյատորների դինամիկական վերլուծության ալգորիթմի տարածումը առանց արտաքին կապերի առաձգական ճյուղավորված մեխանիկական համակարգերի վրա: Արդյունքում մշակված դինամիկայի խառը խնդրի թվային լուծման հաշվարկային սխեման պահպանում է իր հիմքում դրված ալգորիթմի բոլոր բացահայտված առավելությունները:

**Առանցքային բաներ.** առաձգական ճյուղավորված համակարգեր, շարժման դիֆերենցիալ հավասարումներ, դինամիկական վերլուծության ալգորիթմ :

**Yu.L. SARGSYAN, K.G. STEPANYAN, H.A. GEVORGYAN**

### **DYNAMIC ANALYSIS OF FLEXIBLE TREE-LIKE MECHANICAL SYSTEMS WITHOUT EXTERNAL CONSTRAINTS**

An extension of the dynamical analysis algorithm of flexible manipulators is proposed for flexible tree-like mechanical systems without external constraints. The generalized algorithm of numerical calculation for the mixed dynamical problem maintains all the revealed advantages of the basic algorithm.

**Keywords:** flexible tree-like systems, differential equations of motion, dynamic analysis algorithm.